אלגברה 1/מ

תרגול

מתרגלת: ויויאן לאון

חורף תשפ"ו

TECHNION
Israel Institute of Technology

תזכורת:

1. V מ"ו מעל F, $v_1,v_2,\dots,v_n \in V$, $v \in V$. נאמר ש- v הוא קומבינציה לינארית (ק"ל) של $v_1,\dots v_n$ אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.
2. יהי V מ"ו מעל שדה F, ותהי $S = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ קבוצה של וקטורים ב- V. המרחב הנפרש ע"י S הוא אוסף הקומבינציות הלינאריות של הוקטורים ב- S.
$$Span(S) = Sp(S) = Sp\{v_1,\dots,v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1,\dots,\alpha_n \in F\}$$
3. $S = \{v_1,\dots,v_n\}$ נקראת קבוצה פורשת למרחב W אם כל וקטור ב- W הוא ק"ל של איברי S.
4. $Sp(S)$ הוא תת מרחב וקטורי של V, והוא המינימלי המכיל את S.
5. מרחב השורות של A הוא המרחב הנפרש ע"י השורות של A, סימון: $Row(A)$
6. מרחב העמודות של A הוא המרחב הנפרש ע"י העמודות של A, סימון: $\mathrm{Col}(A)$
7. ביצוע פעולות אלמנטריות על שורות A לא משנה את מרחב השורות של A.

TECHNION
Israel Institute of Technology

תזכורת:

8. עבור מטריצות לא ריבועיות, מרחב השורה ומרחב העמודה הם תתי מרחבים של מרחבים שונים, ולכן הם אף פעם לא שווים.
9. במטריצות ריבועיות, **סימטריות/ אנטי-סימטריות**, $Row(A) = Col(A)$.
10. שורות המטריצה שמתאפסות אחרי הדירוג הן ק"ל של השורות האחרות.
11. שיטות לבדוק אם v **שייך למרחב הנפרש** ע"י הוקטורים $v_1, \dots, v_n$.
    - לבדוק אם הוא ק"ל שלהם, כלומר, לחפש $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$
    - לבנות מטריצה $A = \begin{pmatrix} \dots & v_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & v_n & \dots \end{pmatrix}$ (כלומר שורותיה $v_1, \dots, v_n$) ולבדוק אם $v \in Row(A)$
    - לבנות מטריצה $A = \begin{pmatrix} \dots & v_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & v_n & \dots \\ \dots & v & \dots \end{pmatrix}$ ולבדוק אם השורה האחרונה מתאפסת.

TECHNION
Israel Institute of Technology

תזכורת:

12. V מ"ו, F שדה, $v_1,\dots,v_n \in V$ ת"ל אם קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in F$ לא כולם שווים ל-0 כך ש-
$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

13. כל קבוצה **שמכילה את וקטור ה-0** היא ת"ל.

14. שני וקטורים u,v שונים מ-0 הם ת"ל אמ"מ הם **פרופורציוניים**: $v = \alpha u$, $\alpha \neq 0$

15. כל תת קבוצה של קבוצה בת"ל היא גם בת"ל.

16. אם לקבוצה $\{v_1,\dots,v_n\}$ יש תת קבוצה שהיא ת"ל, אז גם $v_1,\dots,v_n$ ת"ל.

17. בדיקת תלות/ אי-תלות לינארית: בניית קבוצת וקטורי שורה שקולה מבחינת תלות לינארית לקבוצה הנתונה, ודירוג מטריצה. אם $r(A) = m$ הוקטורים בת"ל. אם $r(A) < m$ הוקטורים ת"ל.

TECHNION
Israel Institute of Technology

פרק 7
בסיס ומימד

TECHNION
Israel Institute of Technology

הגדרה:

בסיס של מרחב וקטורי V מעל שדה F היא קבוצה B של וקטורים ב- V **שפורשים** את V והיא **בלתי תלויה לינארית**.

המימד של המרחב V זה הגודל של **בסיס** B של V. סימון: $\dim_F V$

הערה: בסיס הוא לא יחיד, וכל הבסיסים של V הם בעלי אותו גודל.

TECHNION
Israel Institute of Technology

נבדוק עבור כל קבוצה האם היא בסיס של R^3:

$$\dim_R R^3 = 3$$

$$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$$

בת"ל | לא פורשת

$$B_2 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,-5,9)\}$$

ת"ל | פורשת

$$B_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,2,0)\}$$

ת"ל | לא פורשת

$$B_4 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$$

בת"ל | פורשת

TECHNION Israel Institute of Technology

משפט:

נתון V מ"ו, $dimV = n$, אז:

1. כל קבוצה **בת"ל** בת n איברים היא בסיס.
2. כל קבוצה **פורשת** בת n איברים היא בסיס.
3. כל קבוצה עם יותר מ- n איברים היא **ת"ל**.
4. כל קבוצה עם פחות מ- n איברים **לא פורשת** את V.

TECHNION
Israel Institute of Technology

משפט:

1. כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

$$S = \{(1,2,3),(4,5,6)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$$

2. מכל קבוצה פורשת ניתן להוציא בסיס (ע"י הוצאה של חלק מאיברי הקבוצה).

$$S = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,2),(3,4),\cancel{(5,6)}\}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

משפט:

1. כל קבוצה בת"ל ניתן להשלים לבסיס.

$$S = \{(1,2,3), (4,5,6)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,2,3), (4,5,6), (0,0,1)\}$$

2. מכל קבוצה פורשת ניתן להוציא בסיס (ע"י הוצאה של חלק מאיברי הקבוצה).

$$S = \{(1,2), (2,4), (5,6)\}$$

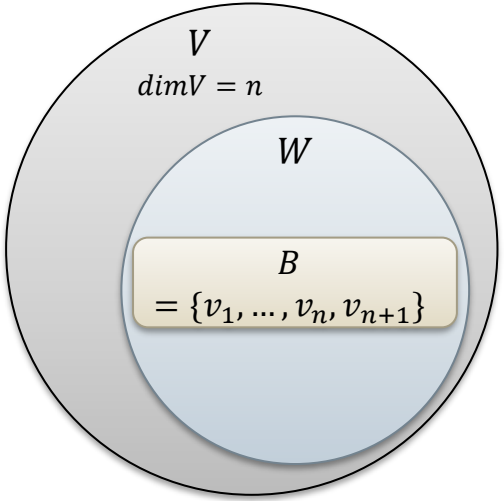
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \{(1,2), \cancel{(2,4)}, (5,6)\}$$

משפט:

יהי W תמ"ו של V, אז:

1. $dimW \leq dimV$
2. אם יש שוויון $dimW = dimV$, אז $W = V$



- נניח בשלילה ש- $dimW > dimV$
- $W \subseteq V$ ולכן $B \subseteq V$.
- $v_1, \dots, v_{n+1} \in V$
- $dimV = n$ ולכן כל קבוצה עם יותר מ- n איברים היא **ת"ל**
- B מכיל $n + 1$ איברים ב-V ולכן הקבוצה ת"ל, אבל B בסיס
- סתירה. ולכן $dimW \leq dimV$

TECHNION Israel Institute of Technology

משפט המימדים:

$$\dim(U+W) = dimU + dimW - \dim(U \cap W)$$

הערה: עבור מרחב האפס $V = \{0\}$, הבסיס יהיה קבוצה ריקה ולכן המימד הוא 0.

TECHNION
Israel Institute of Technology

דוגמאות:

1. $V = R^n$

איבר כללי: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$B = \{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$$

$$\dim R^n = n$$

2. $V = R^{mxn}$

איבר כללי: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$dim R^{mxn} = m \cdot n$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

דוגמאות:

3. פולינומים ממעלה קטנה/ שווה ל- n: $V = R_n[x]$

איבר כללי: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$B = \{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$$

$$dim R_n[x] = n + 1$$

4. $V = C^n$ כמ"ו מעל שדה C

איבר כללי: $(z_1, z_2, \dots, z_n)$

$$B = \{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$$

$$dim_C\, C^n = n$$

5. $V = C^n$ כמ"ו מעל שדה R $F = R$ ולכן הסקלרים חייבים להיות ממשיים. ניעזר בייצוג האלגברי

איבר כללי: $(z_1, z_2, \dots, z_n) = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n)$

הוצאת סקלרים: $a_1(1,0,\dots,0) + b_1(i,0,\dots,0) + a_2(0,1,0,\dots,0) + b_2(0,i,0,\dots,0) + \dots + a_n(0,\dots,0,1) + b_n(0,\dots,0,i)$

$$B = \{(1,0,\dots,0), (i,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1), (0,\dots,0,i)\}$$

$$\dim_R C^n = 2n$$

TECHNION Israel Institute of Technology

תרגיל 1:

יהי

$$W = \{(a+b-c)t^2 + (2a+b+c)t + (b-c) \mid a,b,c \in R\}$$

תת מרחב של $R_2[x]$. מצאו בסיס ומימד של W.

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 2:

מצאו בסיס ומימד למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הבאה:

$$x + 3y + z + w = 0$$
$$2x + 4y + 5z + 2w = 0$$
$$7x + 23y + 4z + 7w = 0$$

תרגיל 3:

מצאו בסיס ומימד ל-

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a + b - c = 0 \, , d - 2c = 0 \right\}$$

TECHNION
Israel Institute of Technology

תרגיל 4:

יהי $V = R_3[x]$, ותתי מרחבים:

$$W = Sp\{1 + x, x - 2x^2 + x^3, 1 + 3x - 4x^2 + 2x^3\}$$

$$U = \{p \in V \mid p(0) = p(1)\}$$

א. מצאו בסיס ומימד ל- $U, W, U \cap W, U + W$

ב. האם $W = V$? אם לא, השלימו את הבסיס של W לבסיס של V.

TECHNION
Israel Institute of Technology